31/10/2017

<u>Απόδειξη</u> (Θ. Bolzano-Weierstrass)

Έστω η $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$

$\exists\ r>0 \quad \|\bar{x}_\nu\| \leq r$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad (x_\nu^{(i)})_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ φραγμένη με $|x_\nu^{(i)}| \leq r \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\xrightarrow[\text{BW στον } \mathbb{R}]{} \forall i = 1, \dots, n \ \exists$ συγκλίνουσα υπακολουθία της $(x_\nu^{(i)}) \in \mathbb{R}$

$$|x_\nu^{(i)}| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (x_\nu^{(j)})^2\right)^{1/2}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

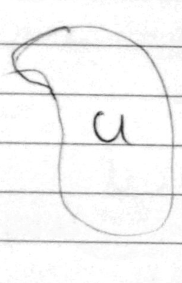
$\nu=1$	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$\dots$	$x_1^{(n)}$
2	$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	$\dots$	$x_2^{(n)}$
3	$x_3^{(1)}$	$x_3^{(2)}$	$\dots$	$x_3^{(n)}$
4	$x_4^{(1)}$	$x_4^{(2)}$	$\dots$	$x_4^{(n)}$
5	$x_5^{(1)}$	$x_5^{(2)}$	$\dots$	$x_5^{(n)}$
6	$x_6^{(1)}$	$x_6^{(2)}$	$\dots$	$x_6^{(n)}$
$\vdots$				$\vdots$

<u>Προσοχή</u> Εμείς θέλουμε μια ακολουθία δεικτών $(k_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\forall i = 1, \dots, n$ να συγκλίνουν οι $(x_{k_\nu}^{(i)})_{\nu\in\mathbb{N}}$

Έστω $(x_{\ell_\nu}^{(1)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια υπακολουθία της $(x_\nu^{(1)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει (B.W. στο $\mathbb{R}$). Οι αντίστοιχες $(x_{\ell_\nu}^{(i)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ $i=1,2,\dots,n$ είναι φραγμένες.

Επιλέγουμε τώρα μία $(x_{\ell_{\mu_\nu}}^{(2)})_{\nu\in\mathbb{N}} \subset (x_{\ell_\nu}^{(2)})_{\nu\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει. Τότε η αντίστοιχη $(x_{\ell_{\mu_\nu}}^{(1)})$ συγκλίνει και αυτή (ως υπακολουθία της συγκλίνουσας $(x_{\ell_\nu}^{(1)})$). Οι αντίστοιχες $(x_{\ell_{\mu_\nu}}^{(i)})$, $i = \boxed{3}, \dots, n$ είναι φραγμένη. $\Longrightarrow$ $\exists$ υπακολουθία που συγκλίνει $\Longrightarrow$ Στο τέλος έχω βρει μια υπακολουθία $(x^{(i)}_{k_\nu})$, $i=1,\dots,n$ επαγωγικά που συγκλίνει $\forall\ i=1,\dots,n$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$. Τότε, $\bar{x}$ σημείο συσσώρευσης του $U \iff \exists\ (\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset U\setminus\{\bar{x}\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$



<u>Απόδειξη</u>

$\bar{x}$ σ.σ. του $U \underset{ορ.}{\iff} \forall\ \varepsilon>0$

$U\cap B(\bar{x},\varepsilon)\setminus\{\bar{x}\} \neq \emptyset$

Άρα αν $\bar{x}$ σ.σ. τότε $\forall\ \nu\in\mathbb{N}\ \exists\ \bar{x}_\nu\in U\setminus\{\bar{x}\}$
: $\underbrace{\|\bar{x}_\nu-\bar{x}\|}_{} < \frac{1}{\nu}$ $(\Longrightarrow \bar{x}_\nu \to \bar{x})$

$\iff \bar{x}_\nu \in B(\bar{x}, \frac{1}{\nu})$

Από την άλλη, αν υπάρχει μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu)\subset U\setminus\{\bar{x}\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$
Θα υπάρχει $\forall\ \varepsilon>0$ κάποιο $\nu_0\in\mathbb{N}$: $\|\underbrace{\bar{x}_{\nu_0}}_{\in U\setminus\{\bar{x}\}}-\bar{x}\|<\varepsilon$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}$
$\Longrightarrow U\cap B(\bar{x},\varepsilon)\setminus\{\bar{x}\}\neq\emptyset$.

<u>Πρόταση</u> Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ και $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$. Τότε: $\bar{x}\in\underbrace{\bar{U}}_{\text{κλειστή θήκη } U} \iff$
$\exists\ (\bar{x}_\nu)\subset U : \bar{x}_\nu\to\bar{x}$

<u>Απόδειξη</u> Ξέρουμε από προηγούμενη πρόταση ότι

$\bar{U} = U\cap U'$ (όπου U' τα σ.σ. του U)

Άρα: Αν $\bar{x}\in U$, τότε η σταθερή ακολουθία $\bar{x}_\nu=\bar{x}, \nu\in\mathbb{N}$, συγκλίνει στο $\bar{x}$. Αν $\bar{x}\in U'$, τότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Από την άλλη, έστω $(\bar{x}_\nu)\subset U$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}$. Αν $\exists\ \nu\in\mathbb{N}$ $\bar{x}_\nu=\bar{x}$, τότε $\bar{x}\in U$, ενώ αν $\bar{x}_\nu\neq\bar{x}$ $\forall\ \nu\in\mathbb{N}$ θα έχουμε $\bar{x}\in U'$, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση.

<u>Πρόταση</u> (SUPER ΠΡΑΚΤΙΚΗ) $\underbrace{U \text{ κλειστό}}_{\bar{U}=U} \iff \forall (\bar{x}_\nu)\subset U$ και $\bar{x}_\nu\to\bar{x}\in\mathbb{R}^n$: $\boxed{\bar{x}\in U}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Longrightarrow$: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$

Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\bar{x} \in \bar{U} = U$

$\Longleftarrow$: Έστω ότι $\bar{x} \in \bar{U}$ (Θ.ν.δ.ο. $\bar{x} \in U$)

Τότε υπάρχει $(\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$ και άρα από υπόθεση, $\bar{x} \in U$.

ΠΡΟΤΑΣΗ $U \subset \mathbb{R}^n$: συμπαγές $\iff \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$

$\exists (\bar{x}_{k_\nu})$ και $\bar{x} \in U$ $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$ (Άσκηση)

Άσκηση Δ.ο. $\underbrace{\bar{x}_\nu}_{\in \mathbb{R}^n} \to \underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^n} \Longrightarrow \underbrace{\|\bar{x}_\nu\|}_{\in \mathbb{R}} \to \underbrace{\|\bar{x}\|}_{\in \mathbb{R}}$

$\bar{x}_\nu \to \bar{x} \overset{\text{ορ.}}{\iff} \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| \to 0$

$\|\bar{x}_\nu\| \to \|\bar{x}\| \iff |\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}\|| \to 0$

[$a_\nu \to a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \ \forall \nu \geq \nu_0$

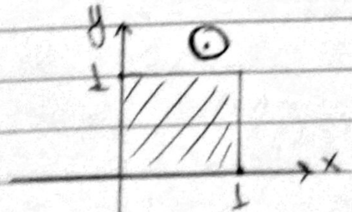
$|a_\nu - a| < \varepsilon$

$||a_\nu - a| - 0| \iff |a_\nu - a| \to 0$]

$0 \leq \underbrace{|\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}\||}_{\to 0} \leq \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}\|}_{\to 0}$ άρα $|\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}\|| \to 0 \Longrightarrow$ $\|\bar{x}_\nu\| \to \|\bar{x}\|$.

Άσκηση Δ.ο. $U = [0,1] \times [0,1]$ κλειστό

Λύση



Έστω μια ακολουθία $(x_\nu, y_\nu) \in U$, $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$\Updownarrow$

(Θ.ν.δ.ο. $(x_0, y_0) \in U$)

$x_\nu \to x_0$

$y_\nu \to y_0$

$x_\nu \to x_0$

$y_\nu \to y_0$

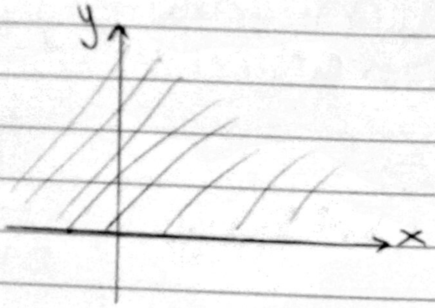
$\Longrightarrow$ $0 \leq x_\nu \leq 1$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$0 \leq x_0 \leq 1$ (Θεωρ. ισοσυγκλινουσών $a_\nu \to a$, $\beta_\nu \to \beta$, $a_\nu \leq \beta_\nu$ $\forall \nu \Rightarrow a \leq \beta$)

Αντίστοιχα, $y_\nu \longrightarrow y_0 \in [0,1] \implies (x_0,y_0) \in U$

Άσκηση Δ.ο. το $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>0\}$ είναι ανοικτό



Λύση Ισοδύναμα θέλω να δείξω ότι

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ είναι κλειστό (τότε $\mathbb{R}^2 \setminus V = U$ ανοικτό).

Έστω μια ακολουθία $(x_\nu, y_\nu) \in V$ με $\underbrace{(x_\nu,y_\nu) \to (x_0,y_0)}\in \mathbb{R}^2$

(Θ.ν.δ.ο. $(x_0,y_0) \in V$)

$\iff x_\nu \to x_0 \wedge \underbrace{y_\nu}_{\vee} \to y_0$

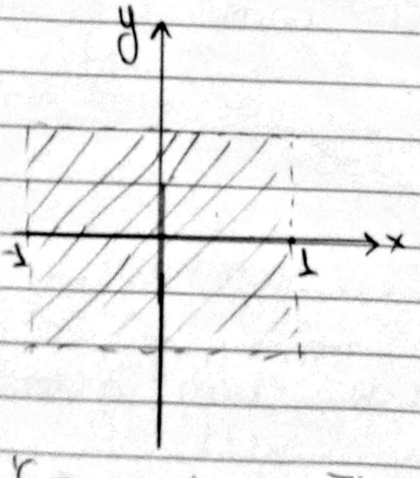
$y_\nu \leq 0$

$\implies y_0 \leq 0$

Άσκηση Δ.ο. $U = (-1,1) \times (-1,1)$ είναι ανοικτό.

Λύση Ισοδύναμα $V = \mathbb{R}^2 \setminus U$ κλειστό

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x| \geq 1 \vee |y| \geq 1\}$.



Έστω $\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{\in V} \longrightarrow (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

Θέλω να δείξω $(x_0,y_0) \in V$

Έστω $(x_{k_\nu}) \subset (x_\nu)$ με $|x_{k_\nu}| \geq 1 \implies x_{k_\nu} \to x_0$

$\implies \underbrace{|x_{k_\nu}|}_{\geq 1} \to \underbrace{|x_0|}_{\geq 1}$

Έστω ότι $\nexists$ $(x_{k_\nu}) \subset (x_\nu)$ με $|x_{k_\nu}| \geq 1 \implies$

$\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0 : |x_\nu| \leq 1 \implies \forall \nu \geq \nu_0 : \underbrace{|y_\nu|}_{\to y_0} \geq 1$

$\implies |y_0| \geq 1$

Άσκηση (Πρόταση) $\underbrace{U \subset \mathbb{R}^n \text{ συμπαγές}}$ $\Longleftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$

$\exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ και $\bar{x} \in U$ $\Downarrow$

$\bar{x}_{k_\nu} \longrightarrow \bar{x}$ U κλειστό και φραγμένο (στον $\mathbb{R}^n$)

Λύση

$\Longrightarrow$: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \underset{U \text{ φραγμένο}}{\Longrightarrow} (\bar{x}_\nu)$ φραγμένη $\underset{B.W.}{\Longrightarrow}$

$\exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$

$\bar{x}_{k_\nu} \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \underset{U \text{ κλειστό}}{\Longrightarrow} \bar{x} \in U$

$\Longleftarrow$: Έστω ότι U δεν είναι φραγμένο $\Longrightarrow$
$\forall \nu \in \mathbb{N} \ \exists \ \bar{x}_\nu \in U$ με $\|\bar{x}_\nu\| \geq \nu \Longrightarrow$
$\forall$ υπακολουθία της $(\bar{x}_\nu)$ έχουμε
$\|\bar{x}_{k_\nu}\| \geq k_\nu \geq \nu$
$\Longrightarrow (x_{k_\nu})$ δεν είναι φραγμένη $\Longrightarrow$
(x_{k_ν}) δεν συγκλίνει, άτοπο στην υπόθεση.

$\bar{y} \in B(\bar{x}, r)$
$\Leftrightarrow \|\bar{y} - \bar{x}\| < r$

Άρα U φραγμένο

Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$
(Θ.ν.δ.ο. $\bar{x} \in U$.) Τότε για κάθε υπακολουθία
έχω $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$
Άρα μέσα σε αυτές είναι και αυτή $(\bar{y}_{k_\nu})$ η οποία
από υπόθεση συγκλίνει σε ένα $\bar{y} \in U$
$\Longrightarrow \bar{y}_{k_\nu} \to \bar{x}$ και $\bar{y}_{k_\nu} \to \bar{y} \in U \Longrightarrow \bar{x} = \bar{y} \in U$.

Πραγματικές και διανυσματικές συναρτήσεις (μίας ή) περισσοτέρων μεταβλητών

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Η $\bar{f}: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$
δηλαδή η απεικόνιση $U \ni \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \bar{f}(\bar{x}) =$
$\begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ ($f_1(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, $f_m(\bar{x}) \in \mathbb{R}$) ονομάζεται συνάρτηση n πραγματικών

(ανεξάρτητων) μεταβλητών. (ή αν $n \geq 2$ συνάρτηση περισσο-
τέρων (ανεξ.) μεταβλητών.)

Αν $m=1$ τότε η $f: U \to \mathbb{R}$ ονομάζεται πραγματική συνάρτηση και αν $m \geq 2$ διανυσματική συνάρτηση και ειδικότερα, αν $m=n$, $m,n \geq 2$ διανυσματικό πεδίο.

Οι $f_j : U \to \mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$ ονομάζονται συνιστώσες της $\bar{f}$.

Το $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται πεδίο ορισμού.

Το $\mathbb{R}^m$ ονομάζεται πεδίο τιμών.

Το $\bar{f}(U) \overset{\subset \mathbb{R}^m}{:=} \{\bar{y} \in \mathbb{R}^m : \exists\, \bar{x} \in U : \bar{f}(\bar{x}) = \bar{y}\} =$

$$\{\bar{f}(\bar{x}) : \bar{x} \in U\}$$

ονομάζεται εικόνα (ή σύνολο τιμών της $\bar{f}$) [ή εικόνα του U κάτω από την $\bar{f}$] και το

$$\Gamma_{\bar{f}} := \{ \underbrace{(\underset{x_1,\dots,x_n}{\bar{x}}, \underset{f_1(\bar{x}),\dots,f_m(\bar{x})}{f(\bar{x})})}_{=(x_1,\dots,x_n,f_1(\bar{x}),\dots,f_m(\bar{x}))} : \bar{x} \in U \} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

ονομάζεται ~~γράφημα~~ της $\bar{f}$